

Aperçu sur la théorie des jeux

**Illustrée avec un exemple
célèbre : Le jeu du « Dilemme
du prisonnier »**

Plan

- ↪ **Les origines de la théorie des jeux**
- ↪ **Le développement de la théorie**
- ↪ **Les applications – Le Dilemme du prisonnier**
- ↪ **En conclusion : réflexion sur les modèles ...**

Fondements des sciences de l'information

Caractéristiques des problèmes

Peu de variables

Beaucoup de variables

Déterministe

Ordre simple

Ordre complexe

Physique classique et sciences de l'ingénieur correspondantes

- Calcul différentiel et intégral
- Équations différentielles et aux différences finies
- Géométrie analytique, géométrie descriptive, théorie des surfaces

Physique moderne et sciences de l'ingénieur correspondantes

- Programmation mathématique
- Programmation et algèbre linéaire
- Calcul tensoriel, analyse spectrale, opérateurs et espaces de Hilbert

Stochastique

Désordre simple

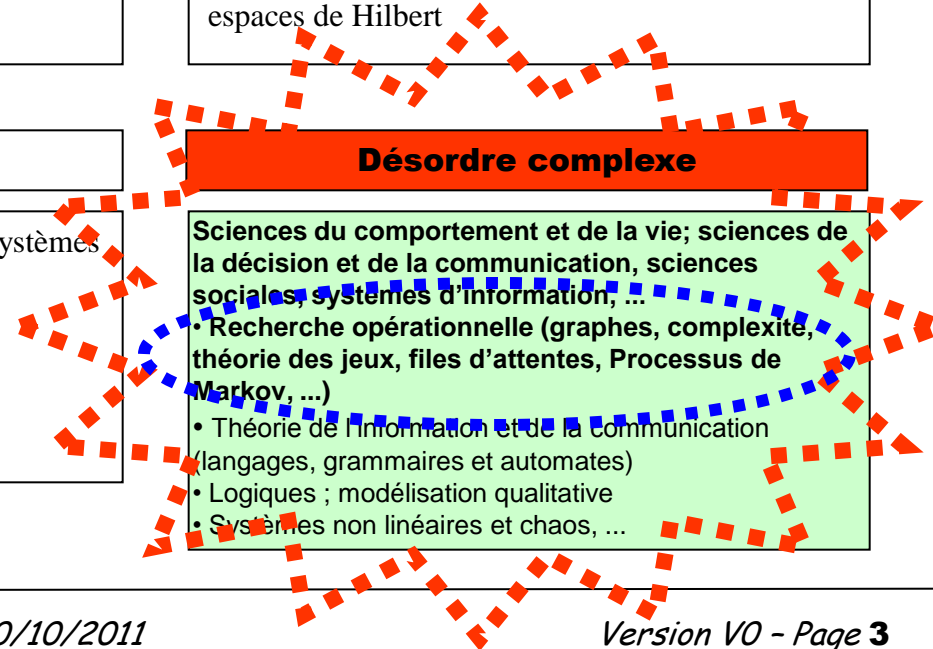
Désordre complexe

Physique statistique/Thermodynamique, systèmes dynamiques et sciences de l'ingénieur correspondantes

- Probabilités et statistiques
- Phases et transitions de phase
- Degrés de liberté et espace des phases

Sciences du comportement et de la vie; sciences de la décision et de la communication, sciences sociales, systèmes d'information, ...

- Recherche opérationnelle (graphes, complexité, théorie des jeux, files d'attente, Processus de Markov, ...)
- Théorie de l'information et de la communication (langages, grammaires et automates)
- Logiques ; modélisation qualitative
- Systèmes non linéaires et chaos, ...



Personnalités à l'origines de la théorie des jeux

↳ Les probabilistes français

- Émile Borel (1871-1956), Louis Bachelier (1870-1946), ...
 - ✓ Les singes dactylographes
 - ✓ Modélisation de la spéculation boursière

↳ John von Neumann

- Article fondateur (1928) : *Zur gesellschaft spiele ...*
- Livre fondateur (1944) : ***Theory of games and economic behavior***, co-écrit avec Oskar Morgenstern.

↳ Princeton et l'IAS

- John Nash, entre autres célébrités

↳ La Rand et la Guerre froide

- Thomas Schelling et la modélisation des conflits ; ... Etc. ...

Le contexte historique 1/

↪ Les remises en cause de la physique « classique » avec la relativité générale, et surtout la mécanique quantique dont Von Neumann est l'un des acteurs majeurs

- ↘ Les échanges d'énergie lors des interactions « onde » / « matière » sont **discontinus** (Planck)
- ↘ La « nature » semble **probabiliste** à l'échelle atomique/quantique
- ↘ La notion de trajectoire est inapplicable aux mouvements des électrons de l'atome de Bohr ⇒ Les **matrices** d'états d'Heisenberg
- ↘ Au niveau de l'atome le **hasard** semble omniprésent, ce qui n'empêche pas l'existence de régularités statistiques ⇒ Notion d'**échelles** micro-, méso- et macroscopique
- ↘ Les équations d'Einstein permettent de parler de l'univers comme d'un tout
- ↘ ...

↪ Les mathématiciens et les physiciens imaginent et créent des outillages nouveaux pour décrire cette nouvelle façon de « voir » la nature

- ↘ On parle de **mathématiques « appliquées »**, de **mathématiques « expérimentales »** avec S.Ulam (surtout aux US) mais qui mettront très longtemps à être enseignées en France

Le contexte historique 2/

↪ La crise économique de 1929

- ↪ On ne comprend pas l'économie ⇒ On ne sait pas quelle décision prendre
 - ✓ **Globalement inconsistante** (du strict point de vue de la logique)
- ↪ L'économie est une « science littéraire » ⇒ Keynes, voire « magique » ⇒ Adam Smith et le « doigt invisible du marché » des libéraux
- ↪ Les agents économiques sont des entités discrètes (cf. la terminologie de F.Perroux : **Unités actives**, repris en « praxéologie »), à la fois **sujet et objet** (ce qui nous ramène à Piaget) qui font des choix eux-mêmes discrets dont ils ne « mesurent » pas les conséquences Leur nombre, quoique grand, n'a rien à voir avec ceux que considère la physique → **Le calcul des probabilités est inapplicable** Leurs choix, leurs motivations, ... sont difficilement modélisables (NB : **mimétisme** des agents qui suivent les agences de notation)
- ↪ L'« information » économique qui détermine les choix n'est pas une grandeur extensive comme peut l'être la température ou la gravité, ou encore la conservation de l'énergie → Mensonge, tromperie, ...

↪ Etc... Etc.

Le contexte historique 3/

↪ **La 2^{sd} guerre mondiale et la lutte à mort entre les démocraties et les totalitarismes qui ne se terminera qu'en 1989 avec la chute du « Mur »**

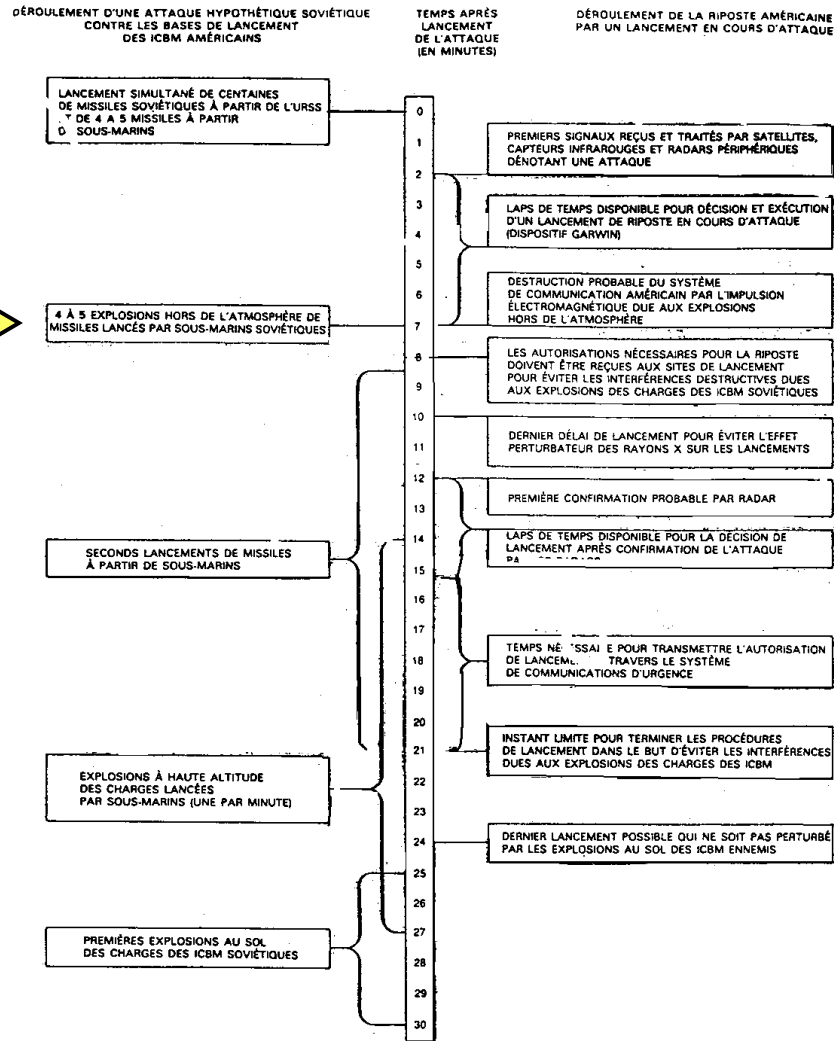
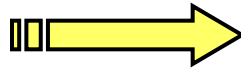
- ↘ Fuite des cerveaux européens vers les États-unis dès 1933
- ↘ Comment et où investir au mieux les ressources des démocraties ?
 - ✓ Comment casser la machine de guerre allemande ?

↪ **La guerre froide et les scénarios d'attaque nucléaire sont des cas d'école, étudiés à la RAND, de l'application de la théorie des jeux**

- ↘ Cas de la crise des missiles de Cuba

La crise des missiles de Cuba

Tout est joué en 6-7 min.



Le temps de la décision

Source : Prof. J. Steinbruner, *Launch under attack*

1. SÉQUENCE HYPOTHÉTIQUE DES ÉVÉNEMENTS qui suivraient le déclenchement d'un attaque nucléaire préventive de l'URSS sur des installations de lancement de missiles balistiques intercontinentaux (ICBM). La bonne exécution d'une telle attaque dépend d'un déroulement très contrôlé dans le temps, tout comme la bonne exécution d'un lancement de représailles « en cours d'attaque ». Le système de commandement des Minuteman américains serait

exposé à de graves coupures pendant le laps de temps nécessaire à la confirmation de l'attaque et à l'exécution d'une contre-attaque. Une solution très automatisée du « lancement en cours d'attaque » a été imaginée par Richard Garwin qui - pour éviter tout risque de coupure - prévoit le lancement des missiles de représailles dans les cinq minutes qui suivent la première indication de l'attaque. (SLBM est le sigle correspondant aux missiles balistiques lancés par sous-marins.)

Utiliser correctement le calcul des probabilités → Bien comprendre la notion d'échelle [*1]

↪ Le niveau méso du monde humain, du monde de la vie ⇒

- ↘ Échelle million/milliard → 10^6 , 10^9 maximum – Les connexions des neurones (10^{11}) dans notre cerveau (10^{15}) – Un corps humain $\approx 25 \times 10^{26}$ molécules
- ↘ Il y a une **individualité propre au vivant** (antinomique avec le hasard)

↪ Le niveau des particules élémentaires de la micro physique

- ↘ Le nombre d'Avogadro → $6,02 \times 10^{23}$ (la « molécule-gramme »)
- ↘ Les particules n'ont pas vraiment d'individualité propre (Cf. le laser)

↪ Le niveau macro de l'information que nous produisons et utilisons

- ↘ L'information contenu dans un livre de 250 pages (environ 1 million de signes typographiques)
Nombre de livres possibles : $30^{(10^6)}$, avec la ponctuation (cf. la nouvelle de J-L.Borgès, *La bibliothèque de Babel*)

© 2011 J. Printz / La théorie des jeux - Soirée Émergence, le 10/10/2011

RELAX..THE PRESIDENT
SAYS NOT TO WORRY..
THE EMBASSY IS 75
PER CENT SECURE



Un conseil de von Neumann

✚ John von Neumann, *Theory of Games and Economic Behaviour*

*Dans la préface et le 1^{er} chapitre de ce livre majeur, publié en 1944, von Neumann compare le développement de l'économie, à ce qu'était la mécanique céleste à l'époque de Kepler, Galilée et Newton. Pour comprendre le mouvement des astres, il faut d'abord comprendre les phénomènes simples, et surtout **savoir mesurer** (cf. Tycho Brahe) : la statique, la chute des corps, le mouvement des planètes et imaginer la « force » qui les fait se mouvoir ...*

*Entre Newton, et ses Principia mathematica, le traité de Mécanique céleste de Poincaré où il démontre l'instabilité à grande échelle du système solaire, et la mécanique statistique (Boltzmann, Gibbs, Duhem), **2 siècle de progrès** seront nécessaires :*

“The great progress in every science came when, in the study of **problems which were modest as compared with ultimate aims, **methods were developed which could be extended further and further.**”**

... The sound procedure is to **obtain first utmost precision and mastery in a limited field, and then to proceed to another, somewhat wider, and so on. ...**

The experience of more advanced sciences indicates that **impatience merely delays progress, including that of treatment of the «burning» questions. **There is no reason to assume the existence of shortcuts.**”**

La théorie des jeux

Définitions et notions fondamentales

Qq. définitions

↪ La "théorie des jeux" est l'étude des modèles de prise de décision en **avenir incertain non probabilisable**.

↪ Un "jeu" est une situation (« Hic et nunc ») où des joueurs sont conduits à **faire des choix stratégiques parmi un certain nombre d'actions possibles**, et dans un **cadre défini à l'avance** qui sera les "**règles du jeu**", le résultat de ces choix constituant une "issue du jeu", à laquelle est associé un "**gain**" (ou paiement), positif ou négatif, pour chacun des participants.

- Les "**jeux coopératifs et non coopératifs**":
un jeu est dit coopératif lorsque les joueurs peuvent communiquer librement entre eux et passer des accords (par ex. sous forme d'un contrat). Ils forment alors une coalition et recherchent l'intérêt général suivi d'un partage des gains entre tous les joueurs.
Dans un jeu non coopératif, les joueurs (qui ne communiquent pas ou ne peuvent pas communiquer entre eux) agissent selon le principe de rationalité économique: chacun cherche à prendre les meilleures décisions pour lui-même (c'est à dire cherche à maximiser égoïstement ses gains individuels). Ce dernier type de jeu fait intervenir les probabilités.
- Les "**jeux à somme nulle et non nulle**":
un jeu est dit à "somme nulle" lorsque la somme des gains des joueurs est constante (ou par le choix subtil d'une fonction utilité peut l'être...) ou autrement dit: ce que l'un gagne est nécessairement perdu par un autre (échecs, poker...). Les jeux de société sont souvent des jeux à somme nulle mais les situations réelles sont souvent mieux décrites par les jeux non coopératifs à somme non nulle car certaines issues sont profitables pour tous, ou dommageables pour tous (vie politique, situations d'affaires ...).
- Les "**jeux avec ou sans équilibre**":
un jeu à somme non nulle coopératif ou non est dit avec "équilibre de Nash" s'il existe un couple de stratégies (dans le cas d'un jeu à deux joueurs) tel qu'aucun des joueurs n'a intérêt à changer unilatéralement de stratégie et ceci afin de s'assurer le maximum des minimum (le "maximin") des gains.

Quelques notions de la théorie (1/)

↪ **Notion d'utilité – Le joueur rationnel**

- ↪ Respect des règles

↪ **Jeux à somme nulle :**

- ↪ Les gains des uns = Les pertes des autres

↪ **Jeux à information parfaite**

- ↪ Les échecs

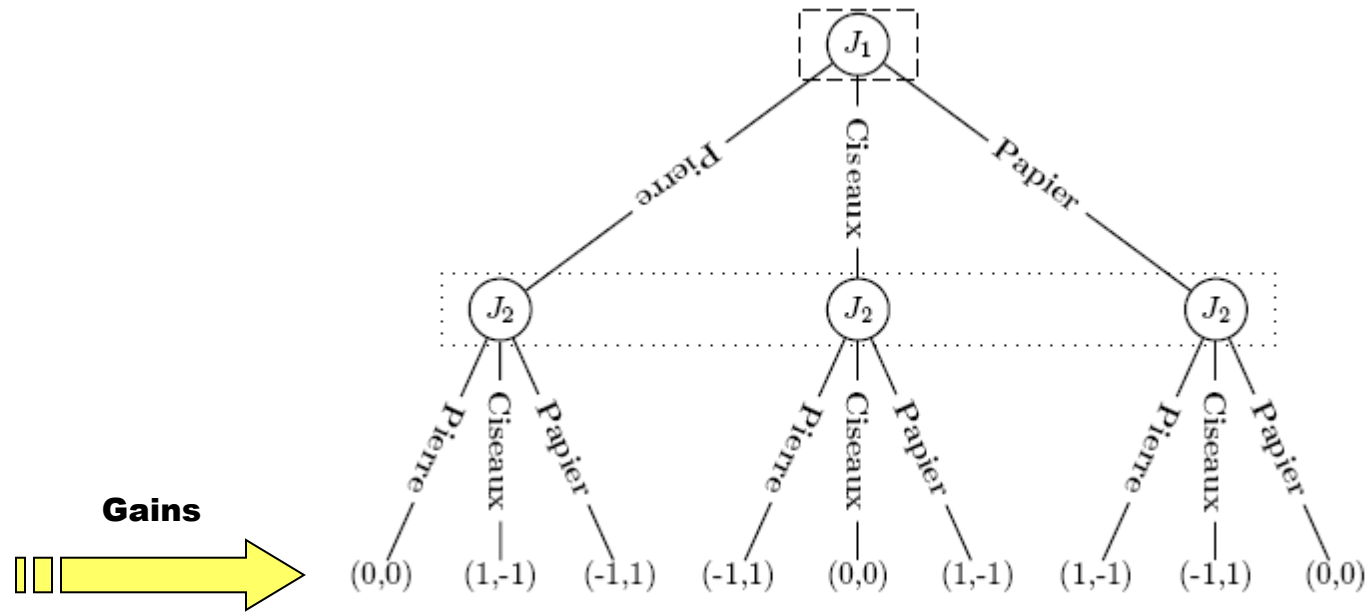
↪ **Jeux à information imparfaite**

- ↪ La guerre (cf. Sun Tsu, Napoléon – Je veux que mes généraux aient de la chance – , Karl von Clausewitz et la théorie de la guerre napoléonienne, ...) et la désinformation/les leurres (cf. l'affaire *Farewell* et la « *Guerre des étoiles* » du président Reagan)
- ↪ L'économie (cf. Joseph Stiglitz)

↪ **Comment représenter un jeu ?**

- ↪ Matrices
- ↪ Arbres

↩ Arbre du jeu **Ciseau, Feuille, Pierre**



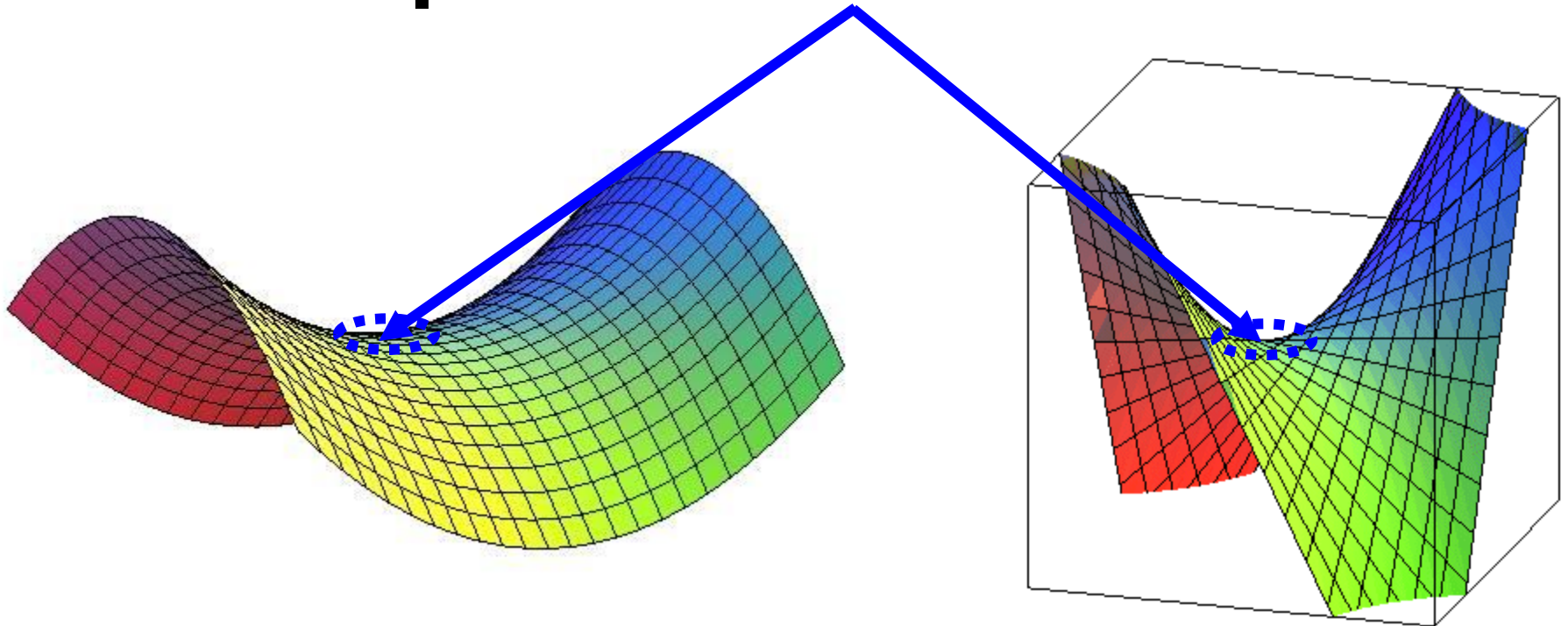
□ Grâce aux progrès des ordinateurs, nous pouvons manipuler des arbres et des automates de très grande taille, par exemple ce qui correspondrait à un programme de 100.000 instructions

Quelques notions de la théorie (2/)

↪ **Stratégie** → comment peuvent/doivent se comporter les acteurs du jeu

- ↘ Acteurs individuels et coalition d'acteurs
- ↘ Maximiser ses gains / Minimiser ses pertes ⇒ Équilibre ?

↪ **Notion d'équilibre – Points selles**



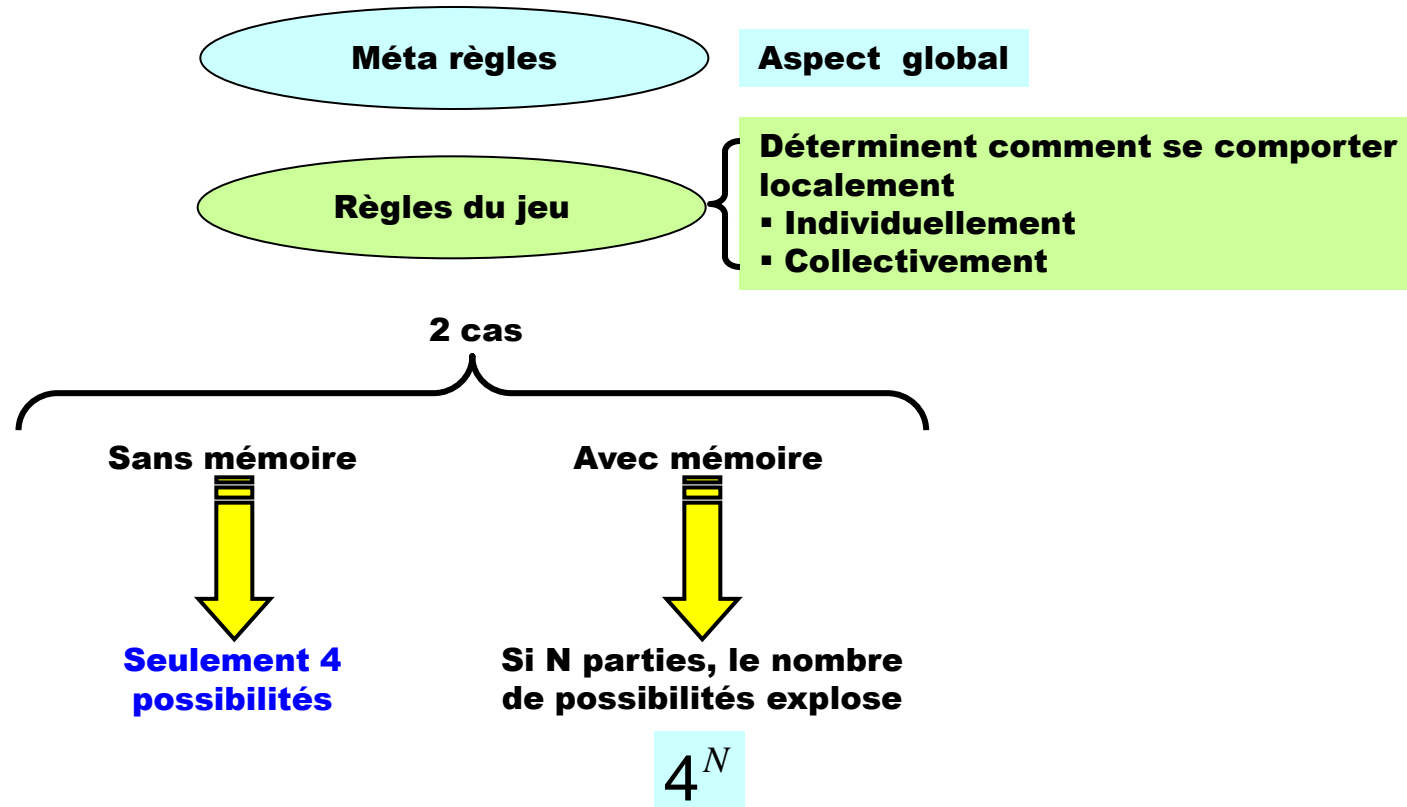
Le développement de la théorie



Notion de méta jeux (Howard, Nigel (1971), *Paradoxes of Rationality: Games, Metagames, and Political Behavior*, Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, ISBN 978-0262582377.)

➤ Comment savoir à quoi/comment on joue ou comment on adapte le jeu, pour échapper aux paradoxes (cas du *Dilemme* ...)

- **Exemple :**



Les faiblesses - limites de la théorie

↪ **Les joueurs « humains » sont-ils vraiment rationnels ???**

↪ **Même question à propos des programmes informatiques qui pilotent la finance mondiale dérégulée** (*Cad. « hors la loi » pour reprendre le titre du livre de Marc Roche*)

✓ Concilier temps réel / temps humain

↪ **Les paramètres culturels qui imprègnent toutes nos décisions échappent à toute modélisation**

↪ **Le problème de la mesure reste une question fondamentale → Trop de « données », type QI, incompréhensibles !!!**

Les applications

↪ La coopération et la confiance entre agent économiques

- ↘ Développement et résolution des conflits économiques
 - ✓ Cf. *Le dilemme des prisonniers*

↪ Psychologie et psychiatrie : l'école de Palo-Alto : G.Bateson, P.Watzlawick, ...

- ↘ Les paradoxes de la communication et les conflits de la personnalité
 - ✓ Cf. Le "double bind" et la schizophrénie

↪ La théorie de l'évolution

- ↘ Conflits et compétition entre les espèces
 - ✓ Maynard Smith, J. (1982), *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press
 - Également étudié par Volterra avec un autre point de vue dans *Théorie mathématique de la lutte pour la vie*.

Le Dilemme du prisonnier

Modélisation de la coopération : le dilemme du prisonnier (Rappaport et Chamamah)

Matrice du jeu

		Joueur B	
		Attitude de coopération b1	Attitude d'agression b2
Joueur A	Attitude de coopération a1	Récompense de la coopération A et B reçoivent 5	Salaire de l'agression de B A reçoit -5, B reçoit 8
	Attitude d'agression a2	Salaire de la tentation de A (agression de B par A) A reçoit 8, B reçoit -5	Punition de l'agression réciproque A et B reçoivent -3

Récompense de la coopération (R)
Salaire de la trahison (T)
Salaire de l'agression (S)
Punition de l'agression réciproque (P)

Si A et B coopèrent, ils reçoivent tous deux une récompense **R**.

Si A coopère mais que B agresse, ou inversement, celui qui coopère (mais qui est trahi !) reçoit **S** et celui qui agresse reçoit **T** (c'est le salaire de la trahison), ce qui suppose que sur deux coups on ait $2R > T + S$, faute de quoi la coopération n'a pas beaucoup de sens.

Si A et B sont tous deux agressifs, ils reçoivent **P**, qui punit sévèrement l'agression réciproque.

Au total, on doit avoir $T > R > P > S$ ce qui fait qu'il est tentant d'être agressif car l'agression unilatérale est fortement récompensée ; mais si les deux joueurs sont simultanément agressifs, la punition est sévère, d'où le paradoxe.

$$\sum \text{Gains} = S + P + T + R + R + S + \dots + R$$

Le dilemme des prisonniers

La meilleure introduction au concept d'interdépendance est le modèle théorique du jeu « Le dilemme des prisonniers ». Dans sa version originale, un magistrat d'instruction tient deux hommes pour suspects d'un vol à main armée. Voici l'histoire :

Les preuves manquent pour porter l'affaire devant les tribunaux ; il fait donc convoquer les deux hommes. Il leur dit avoir besoin d'aveux pour les faire inculper ; sans quoi, il peut seulement les poursuivre pour détention illégale d'armes à feu, délit les faisant encourir une peine de six mois de prison. S'ils avouent tous les deux, il leur promet la sentence minimale pour vol à main armée, soit deux ans. Mais si un seul avoue, il sera considéré comme témoin officiel et relaxé, tandis que l'autre prendra vingt ans, le maximum. Puis, sans leur donner l'occasion d'élaborer une décision commune, il les fait enfermer dans des cellules séparées, d'où ils ne peuvent communiquer.

Que faire dans ces conditions peu communes ? La réponse paraît simple : puisque six mois de prison est de loin le nombre mal, il vaut mieux pour eux ne rien avouer. Mais à peine ont-ils abouti à cette conclusion dans la solitude de leur cellule, qu'un doute leur vient à l'esprit : « Et si mon compagnon, qui parviendra certainement et avec raison à la même conclusion que moi, profitait de la situation pour avouer ? Il s'en tirerait sans autres frais et moi j'en prends pour vingt ans. A bien y réfléchir, je ferais mieux d'avouer. Et si lui n'avoue pas, c'est moi qui suis libre. » Mais alors vient immédiatement une nouvelle pensée : « Si je fais ça, non seulement je trahis la confiance qu'il a en moi, que je prendrai la décision la plus avantageuse pour *tous les deux* (à savoir ne pas avouer et s'en tirer avec six mois), mais en outre, à supposer qu'il soit aussi peu digne de confiance que je le serais en agissant ainsi, il aboutira exactement à la même conclusion : nous avouerons tous deux et nous serons condamnés à deux ans – résultat bien pire que les six mois risqués si nous nions tous deux. »

Tel est leur dilemme et il n'a pas de solution. Même si les prisonniers trouvaient le moyen de communiquer pour prendre une décision commune, leur sort dépendrait encore du degré de confiance qu'ils ont l'un *en* l'autre : sans confiance, le cercle vicieux ne cessera de recommencer. Et en réfléchissant plus avant, chacun ne manquera pas de se rendre compte que cette confiance en l'autre dépend largement de la confiance qu'il inspire à l'autre, qui est à son tour déterminée par le degré de confiance qu'ils ont l'un *pour* l'autre, et ainsi de suite *ad infinitum*.

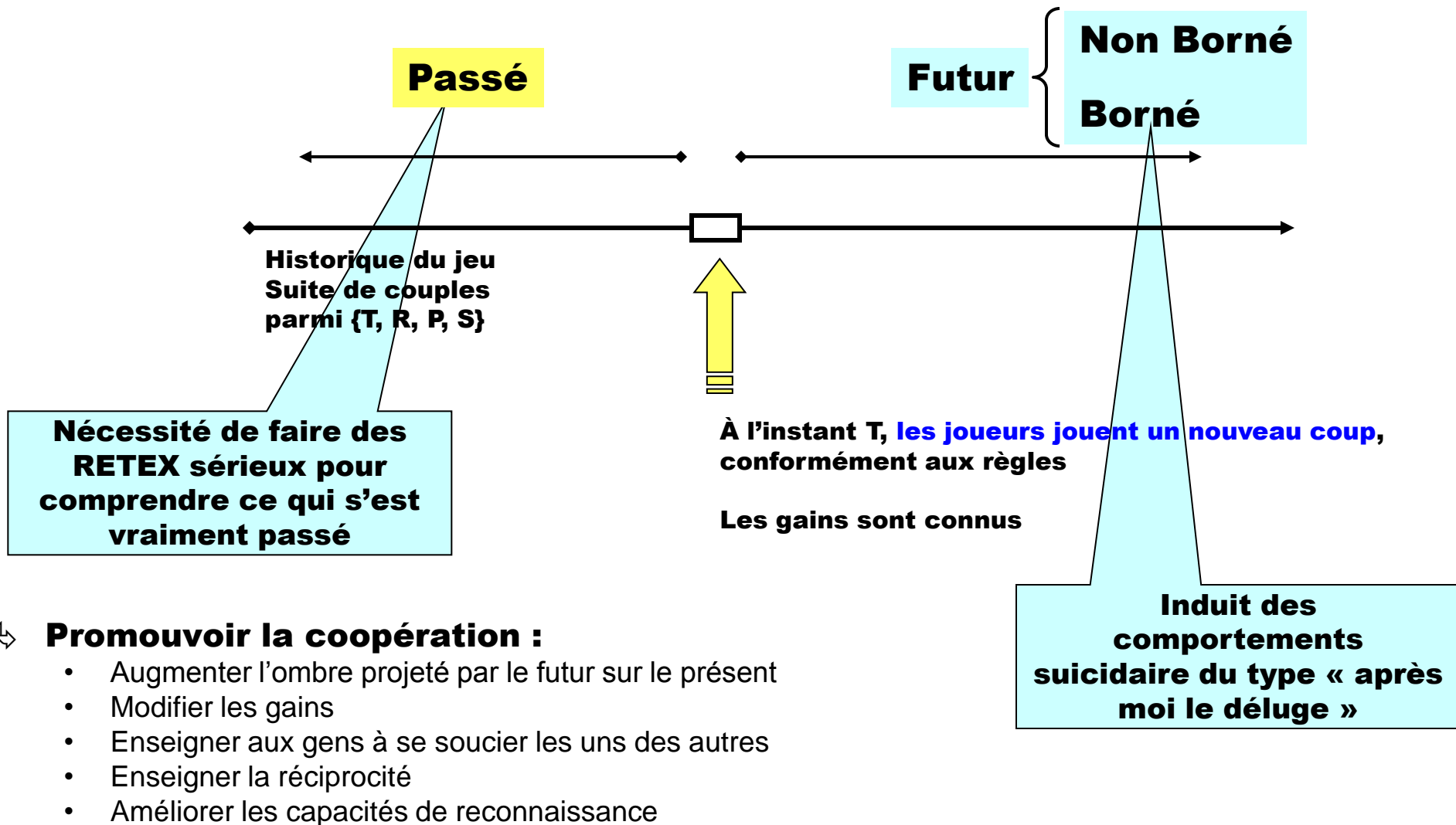
On présente d'habitude le « dilemme des prisonniers » sous la forme d'une matrice à quatre cellules. Deux joueurs, **A** et **B**, peuvent jouer deux coups chacun, à savoir a1 et a2 pour le joueur **A** ; b1 et b2 pour **B**. La figure ci-après représentant une telle matrice montre simplement que si A choisit a1 et B b1, ils gagneront cinq points chacun (i.e. 6 mois de prison qui est la punition minimum si ils restent solidaires). Mais si B choisit l'autre possibilité, b2, A perdra cinq point (10 ans de prison) et B gagnera huit points (i.e. la liberté). L'inverse se produit si le résultat de leur choix est a2 , b1. Enfin s'ils choisissent les possibilités a2 , b2 ils perdent chacun trois points (2 ans de prison, ce qui est le prix de la double trahison).

Les deux joueurs connaissent les gains et les pertes définis par la matrice. Puisque leur choix doit être simultané, sans possibilité de communiquer pour parvenir à un accord (que l'autre joueur pourrait bien entendu rompre à n'importe quel moment du jeu), ce simple modèle mathématique contient l'essence et le caractère désespérant du « dilemme des prisonniers », comme le lecteur pourra s'en rendre compte en y jouant avec quelqu'un – de préférence par un ami. La matrice des gains poussent les joueurs à se trahir lorsqu'ils raisonnent en égoïstes, alors qu'ils s'en seraient mieux tirer en coopérant.

Ce qui est remarquable quand on fait de nombreuses parties de ce jeu, c'est que la stratégie gagnante^[1] est la coopération et la confiance, et qu'il ne faut jamais laisser passer une trahison sans une réponse appropriée.

[1] Le livre d'Axelrod donne tout le détail sur différentes stratégies possibles en cas d'itération, la plus simple étant « œil pour œil, dent pour dent », c'est à dire la loi du talion.

L'information du jeu du Dilemme ...



Les enjeux stratégiques

↪ **Le comportement des joueurs dépend**

1) des enjeux :

- Dans la 2^{ème} guerre mondiale la stratégie des démocraties, Roosevelt/Churchill, était : **écraser l'Allemagne et le Japon**
 - ✓ Et pour cela **coopérer avec l'URSS**
- Dans la guerre froide, c'était **éviter une guerre nucléaire avec l'URSS** via la doctrine MAD
 - ✓ Et pour cela « contenir » toutes les avancées du bloc communiste (Corée, Cuba, Vietnam, ...) **de façon conventionnelle**

2) de la vision du futur à court/moyen/long terme

- Modèles énergétiques du Club de Rome (par Jay Forrester, années 60) – Crise écologique et du manque de ressource
 - ✓ Le temps du politique est de + en + court !!!

Les enseignements du Dilemme ...

↪ **Ne pas être envieux**

↪ **Ne pas être le premier à faire cavalier seul**

↪ **Pratiquer la réciprocité dans la coopération
comme dans la défection**

↪ **Ne pas vouloir être trop malin**

La « morale » du dilemme ...

↪ **La Bible → la loi du talion**

- « Œil pour œil, dent pour dent »

↪ ***Entretiens de Confucius, livre XV, §24, 30 ; Pléiade, Philosophes confucianistes →***

- « Ne pas imposer aux autres ce qu'on ne désire pas pour soi-même ».
- « Commettre une faute et ne pas la corriger, c'est cela commettre un faute ».

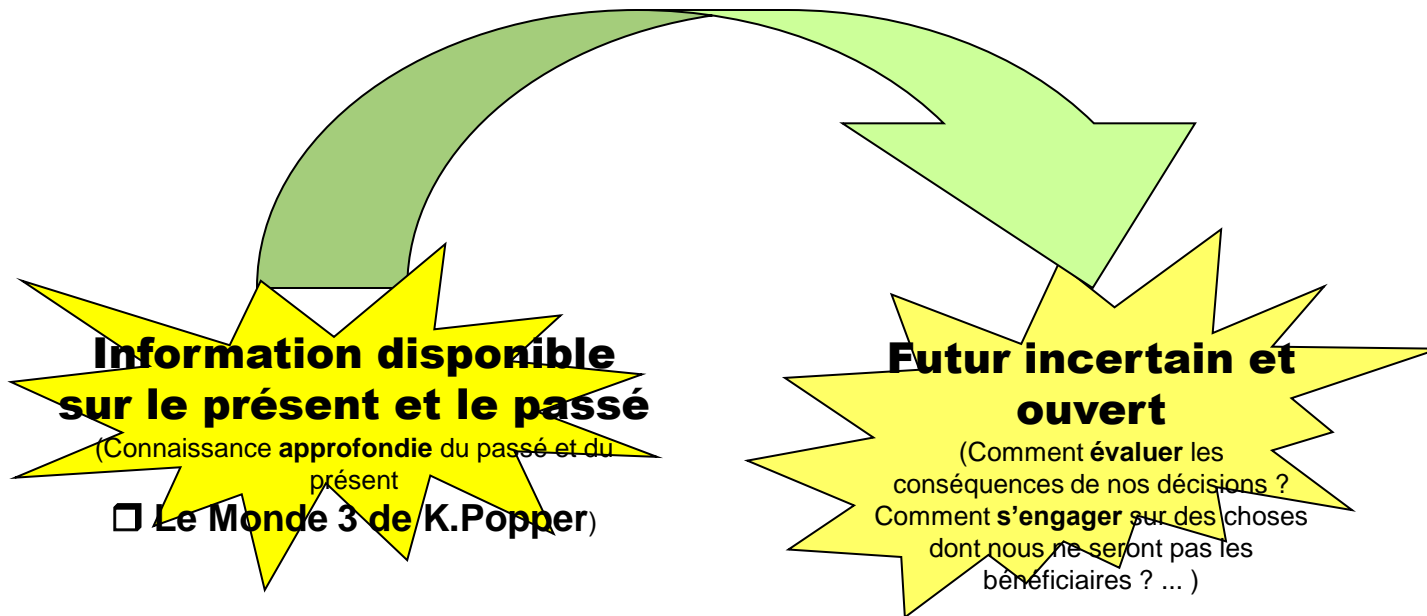
↪ **Les stoïciens, ... et bien sûr les Évangiles**

En conclusion ...

Réflexion sur les modèles

↳ Prédire n'est pas expliquer

- On attend du modèle qu'il nous **dise quelque chose sur ce qui risque de nous arriver** ... mais est-ce une **explication** ?



Mais le modèle ne contient rien de plus que ce que le modélisateur y a mis, consciemment ou inconsciemment !!!

- Tous les systèmes informatisés sont des modèles
- Tous les modèles, informatisés ou non, **fabriquent des artefacts**

↪ **La théorie de la gravitation de Newton (corrigée par Einstein) permet des prévisions avec une précision fantastique → Mais comprend t-on pour autant la gravitation, i.e. l'action à distance ?**

Idem pour la mécanique quantique → Mais comprend t-on la dualité Ondes-Champs / Particules, la non localité, l'influence de « l'observateur », ... ?

↪ **Comprend-on la vie, malgré l'accumulation des données → Le décodage du génome, ... et après ! Quel est sa signification ?**

↪ **Comprend-on les phénomènes sociaux ? Comment les civilisations naissent, se développent, ... et meurent ? Pourquoi certaines cultures ont développé l'écriture, et d'autres non ?!**

↪ **La capacité d'ouverture sur l'extérieur, et le langage, propre aux êtres humains, i.e. leur capacité à modifier leur « programmation » individuelle/collective, est en contradiction avec la notion même de modèle → Quel est le méta modèle ?**

- ✓ Quid de l'émergence des totalitarismes ?
- ✓ Quid de l'effondrement de la France en 1940, en moins de 20 jours !!!
- ✓ Quid de l'effondrement de l'URSS après 1989 ?

↘ Aucune explication vraiment crédible et/ou convaincante !!!

La vérité mathématique absolue ... un rêve brisé par Gödel

David Hilbert, *Problèmes de fondation des mathématiques*, 1928.

« Je crois que ma théorie de la démonstration nous rend encore un service d'un ordre plus général. Qu'en serait-il de la vérité de notre savoir, **de l'existence et du progrès de la science s'il n'y avait au moins en mathématique une vérité solide** ? Il n'est pas rare que l'on voit s'exprimer aujourd'hui [**nous sommes en 1928, 3 ans avant Gödel** !], jusque dans les écrits techniques et des exposés publics, du scepticisme et du découragement à l'égard de la science ; il s'agit là d'une espèce d'occultisme que je tiens pour pernicieuse. La théorie de la démonstration rend une telle attitude impossible et nous donne **la conviction profonde que l'intelligence mathématique, elle au moins, ne connaît pas de barrières et qu'elle peut même explorer les lois de son propre fonctionnement.**

Cantor a dit : « l'essence des mathématiques réside dans leur liberté » ; à l'intention des douteurs et des découragés, je voudrais ajouter : **en mathématique il n'y a point d'ignorabimus**, nous pouvons toujours trouver une réponse à une question **pourvu qu'elle ait un sens** ; et ce qui fut sans doute le pressentiment d'Aristote se confirme, que **notre intelligence** ne s'adonne pas à des artifices mystérieux, mais **procède uniquement d'après des règles bien déterminées et qu'on peut découvrir, règles qui sont en même temps la garantie de l'objectivité absolue de son jugement.** »

Et pourtant ... malgré le génie de Hilbert, tout cela allait s'écrouler !!! Restons vraiment modestes.