Théorème de l'incomplétude de K. Gödel

Les théories mathématiques formelles ne peuvent être qu' incomplètes ou incohérentes

Découvert en 1931 par le mathématicien autrichien Kurt Gödel

Albert Einstein et Kurt Gödel à l'université de Princeton après la deuxième guerre mondiale

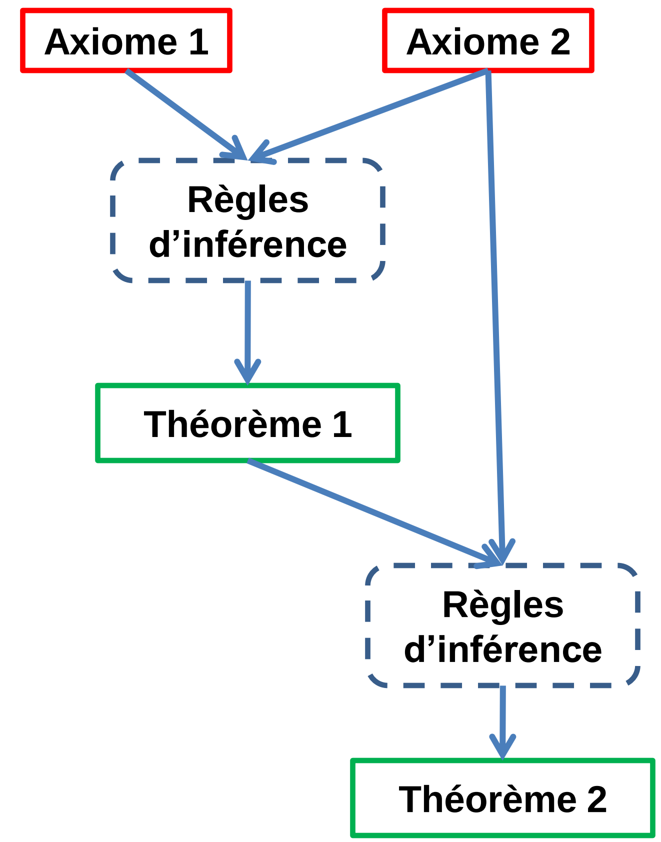
Théorème de l’incomplétude de K. Gödel (suite)

- **Objectif de cette présentation** : **donner un aperçu du théorème de K. Gödel :**
  - **La méthode de démonstration**
  - **Les conséquences mathématiques, philosophiques…**

- *Sources de cette présentation :*
  - *« Gödel’s proof » de E.Nagel et J.Newman*
  - *« Gödel, Escher, Bach » de Douglas Hofstadter*
  - *« La complexité : vertiges et promesses » de Réda Benkitane. Interview de Gregory Chaitin*
  - *« I am a strange loop » de Douglas Hofstadter*
  - *Wikipedia org et fr*
  - *Sites internet*

Théorie mathématique

- Une théorie mathématique est définie par :
  - Des axiomes ou postulats
  - Des règles d’inférence permettant de définir des théorèmes à partir des axiomes ou de théorèmes déjà définis.



Théorie mathématique formelle

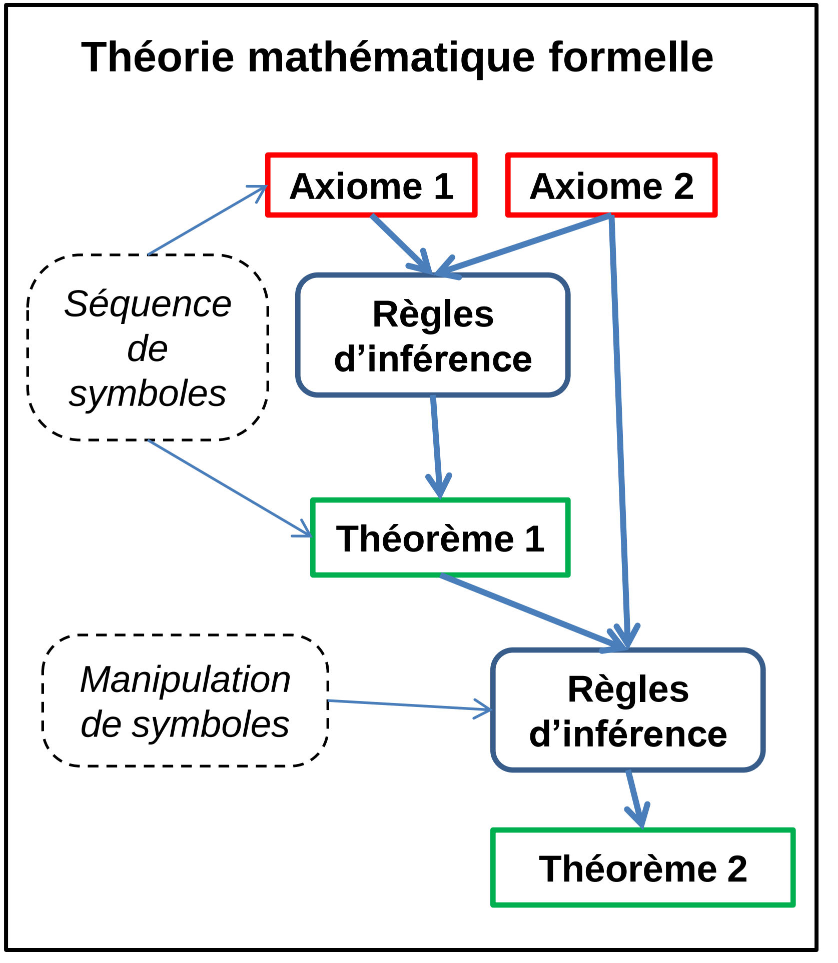
Formalisme basé sur des symboles :

- **Axiomes et théorèmes ⇨ suites de symboles**
- **Règles d'inférences ⇨ manipulations des symboles.**
  Exemple : substitution de variables

Création mécanique des théorèmes :

- **Simple manipulation des symboles**
- **Aucun raisonnement**
- **Inutile de comprendre les axiomes et théorèmes**

La création des théorèmes a valeur de démonstration



Principia Mathematica

- **K. Gödel a choisi la théorie des nombres Principia Mathematica, « PM », pour la démonstration de l'incomplétude.**

- **Théorie formelle inventée au début de XX$^{\text{ème}}$ siècle par les mathématiciens anglais B. Russell et Whitehead.**

- **Était la référence de rigueur des théorie mathématiques formelles**

Exemple de démonstration formelle : preuve de 1 +1 = 2

$*54{\cdot}42.\ \vdash :: \alpha \in 2 . \supset :. \beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv . \beta \in \iota``\alpha$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}4 . \quad \supset \vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y . \supset :.$

$\beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \equiv : \beta = \Lambda . \vee . \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y . \vee . \beta = \alpha : \exists ! \beta :$

$[*24{\cdot}53{\cdot}56 . *51{\cdot}161] \quad \equiv : \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y . \vee . \beta = \alpha \quad (1)$

$\vdash . *54{\cdot}25 . \text{Transp} . *52{\cdot}22 . \supset \vdash : x \neq y . \supset . \iota`x \cup \iota`y \neq \iota`x . \iota`x \cup \iota`y \neq \iota`y :$

$[*13{\cdot}12] \quad \supset \vdash : \alpha = \iota`x \cup \iota`y . x \neq y . \supset . \alpha \neq \iota`x . \alpha \neq \iota`y \quad (2)$

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y . x \neq y . \supset :.$

$\beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv : \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y :$

$[*51{\cdot}235] \quad \equiv : (\exists z) . z \in \alpha . \beta = \iota`z :$

$[*37{\cdot}6] \quad \equiv : \beta \in \iota``\alpha \quad (3)$

$\vdash . (3) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . *54{\cdot}101 . \supset \vdash . \text{Prop}$

$*54{\cdot}43.\ \vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

$[*51{\cdot}231] \quad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$

$[*13{\cdot}12] \quad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (1)$

$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (2)$

$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 . *52{\cdot}1 . \supset \vdash . \text{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$

Principia Mathematica (suite)

Symbole	Signification	Nombre de Gödel
~	non	1
v	ou	2
⊃	Si… alors…	3
∃	Il y a un	4
=	égal	5
0	zéro	6
s	suite de	7
(	parenthèse	8
)	parenthèse	9
,	virgule	10
+	plus	11
x	multiplié par	12

Exemple de formules exprimée avec les symboles

- ss0 + ss0 = ssss0 : 2+2 = 4
- p ⊃ (p v q) : si p alors p ou q
  - p et q sont des variables
  - Les variables de Principia Mathematica sont des nombres ou des phrases
- Exemple de phrases
  - p : le verre est rouge
  - q : le verre est plein
  - p ⊃ q : <u>si « le verre est rouge » alors « le verre est plein »</u>
- Il est possible de construire des expressions sophistiquées : formules mathématiques ou phrases.

Principia mathématica (suite)

- Bertrand Russell et Whitehead croyaient qu'ils avaient construit un système mathématique parfait pour la création mécanique de théories mathématiques complètes et cohérentes.

- En 1931 K. Gödel a détruit cet édifice avec la théorème de l'incomplétude montrant qu'il est possible d'introduire des autoréférences dans les théorèmes de PM et donc l'indécidabilité

Quelques définitions

- **Incomplétude** : une théorie mathématique est incomplète si au moins une formule définie dans le système n'est pas démontrable au moyen des axiomes et des règles d'inférence.
- **Incohérence** : un théorie mathématique est incohérente si elle permet de démontrer qu'un théorème est à la fois vrai et faux.
- **Proposition indécidable** : une proposition est indécidable si on ne peut pas démontrer à partir des axiomes qu'elle est vraie ou fausse.
- **Métamathématique** : étude des théories mathématiques au moyen de méthodes mathématiques
  - Théorèmes relatifs à un ensemble de théories mathématiques. Exemple théorème de l'incomplétude
  - Terme inventé (début du XX$^{\text{ème}}$ siècle) par le mathématicien allemand D. Hilbert

Quelques définitions (suite)

- **Autoréférence :** il y a autoréférence lorsque qu'une formule se réfère à elle-même.
  - Exemple : le paradoxe d'Epiménide « je suis un crétois et tous les crétois sont des menteurs »
  - Bête noire des mathématiciens particulièrement dans les théories formelles.

Aperçu de la démarche de démonstration de l’incomplétude

Principales étapes de la démonstration de l’incomplétude et de l’incohérence de « Principia Mathématica

A. Créer un modèle arithmétique de PM équivalent à PM avec des symboles.

PM avec symboles	*relations bi-univoques*	**PM arithmétique**
Symbole de base ou variable	⟷	**Nombre de Gödel**
Théorème ou axiome *(suite de symboles)*	⟷	**Nombre de Gödel**
Preuve *(suite de théorèmes et axiomes)*	⟷	**Nombre de Gödel**

Pourquoi un modèle arithmétique équivalent ?

- **Création d’autoréférences en introduisant dans une formule son nombre de Gödel**
- **Choix du modèle approprié pour développer les démonstrations**

Aperçu de la démarche de démonstration de l'incomplétude

B. Exprimer avec les symboles de PM «la formule 'z' n'est pas démontrable avec les règle de PM » :

$$\sim(\exists x)\ (DEM(x,z))$$

Il n'y a pas x preuve de z : donc z n'est pas démontrable

DEM(x,z) est la relation entre un théorème z et sa preuve x

C. Introduire dans cette formule une référence à elle-même (autoréférence) en insérant son nombre de Gödel G à la place de z :

$$\sim(\exists x)\ (DEM(x,sssss\ldots\ldots sss0))$$

- Le nombre de « s » est au nombre de Gödel « G » de la formule

D. K. Gödel démontre que le paradoxe :

« G est démontrable si, et seulement si, la négation de G est démontrable »

est un théorème de PM (Principia Mathematica)

Aperçu de la démarche de démonstration de l'incomplétude

E. Déduire de ce paradoxe que :

« La théorie formelle des nombres Principia Mathématica est incomplète ou incohérente »

- **Si la formule « G » est démontrable alors PM est incohérent parce que un théorème et sa négation sont vrais**

- **Si la formule « G » est indécidable (pas démontrable) alors PM est incomplet.**

Aperçu de la démarche de démonstration de l'incomplétude

- **Il est impossible d'assurer la complétude de Principia Mathematica en déclarant que les formules indécidable sont des axiomes,**
  - **parce qu'elles sont infiniment plus nombreuses que les propositions décidables,**
  - **dans le même rapport que les nombres rationnels vis-à-vis des nombres entiers.**

- **Le théorème de l'incomplétude concerne l'ensemble des théories mathématiques formelles**

Conséquences du théorème de l'incomplétude

Les mathématiques

- **Le théorème de l'incomplétude a été dévastateur pour les mathématiciens qui voulaient :**
  - **Créer des théories mathématiques formelles complètes et cohérentes.**
  - **Codifier le raisonnement mathématique dans un système général d'axiomes et d'inférences.**

- ***« Suite au théorème de K. Gödel, on a pris conscience de la subtilité et de la profondeur de la pensée mathématique et de l'effondrement du brillant espoir de mécaniser les mathématiques.***

  Qu'est-ce que la pensée mathématique ?

  Qu'est ce qu'une vérité mathématique ? voilà des question fondamentales encore non résolues 70 ans après K Gödel »

Douglas Hofstadter

Conséquences du théorème de l'incomplétude (suite)

Les mathématiques (suite)

La plupart des mathématiciens n'ont pas réagi aux découvertes de K. Gödel :

- **Ils ne s'intéressaient pas aux mathématiques formelles**
- **Après Gödel ils ont continué de faire les mêmes mathématiques dans leurs spécialités**
- **La solidité des théorèmes continue de reposer sur la rigueur des raisonnements, pas sur des systèmes formels du type « PM ».**

Le public

Grand succès de curiosité chez les intellectuels de toutes disciplines.

- **L'énoncé du théorème interpelle.**
- **Il ébranle les mathématiques qui, depuis les philosophes grecs, sont, dans le monde occidental, l'objet d'un grand respect pour la rigueur des raisonnements.**

Conséquences du théorème de l’incomplétude (suite)

Les philosophes

- **Le théorème de K. Gödel est important pour les philosophes de la connaissance et de la logique.**
- **La plupart des philosophes ne sont pas intéressés au théorème de K. Gödel. La solidité des assertions philosophiques repose sur la rigueur des raisonnements, pas sur des systèmes de déduction formelle du type « PM ».**
- **Souvent le théorème de K. Gödel est utilisé d’une façon purement métaphorique, voire fantaisiste**
- **G. Chaitin, mathématicien mondialement reconnu dans les discipline de la complexité algorithmique dit qu’il ne connait qu’un seul philosophe, Thomas Tymoczko, qui s’intéresse, un peu, à ses travaux.**

Conséquences du théorème de l’incomplétude (suite)

Philosophie et mathématique

- **Des similitudes entre les deux disciplines :**

axiomes, postulats ⇨ prémisses

règles d’inférences ⇨ dialectique, syllogisme

théorèmes ⇨ déductions, conclusions

- **Métaphore philosophique du théorème K. Gödel**

Aucune dialectique formelle ne peut donner une protection absolue contre les risques de sophisme dus à des auto-référencements

Conséquences du théorème de l'incomplétude

Le paradigme de la complexité dans les mathématiques ?

« Je ne pense pas que les implications du théorème de K. Gödel doivent nous faire désespérer. Ma conclusion est que nous ne pouvons avoir des certitudes sur rien.

En conséquence, nous devons toujours tendre vers la raison, mais raisonner ne suppose plus uniquement déduire mécaniquement des conséquences à partir d'axiomes.

Raisonner implique de discuter et d'échanger avec les autres, d'utiliser des intuitions, de faire émerger un consensus »

G. Chaitin *mathématicien spécialiste de la complexité algorithmique*

Le théorème de l'incomplétude illustre les faiblesses de la démarche 'top-down' des déductions axiomatiques.

Il faut les compléter par des démarches 'bottom-up' basées sur des interactions entre des acteurs pluridisciplinaires pour faire émerger des innovations

G. Chaitin envisage même le flou dans les mathématiques : un théorème pourrait être plus ou moins vrai

Annexe 1 : calcul du nombre de K. Gödel

- **Calcul du nombre de K. Gödel d'une suite de symboles : axiome ou théorème.**
- **Exemple : nombre de Gödel de « 0=0 »**

Axiome ou théorème	**0**	**=**	**0**
Nombre Gödel	**6**	**5**	**6**
Nombre premiers	**2**	**3**	**5**
Puissance	2^6	3^5	5^6
Valeur	**64**	**243**	**15625**
Nombre de Gödel	**G = 64*243*15625 = 243000000**		

- **A partir de ce nombre G = 243000000 il est possible de trouver le théorème « 0=0 »**